Gegeben sei folgendes Transportproblem:

Von einem homogenen Gut seien folgende Mengen vorrätig:

Lager 1	500	Einheiten
Lager 2	800	Einheiten
Lager 3	700	Einheiten

Davon sollen die folgenden nachgefragten Mengen befriedigt werden:

Empfänger 1	300	Einheiten
Empfänger 2	500	Einheiten
Empfänger 3	600	Einheiten
Empfänger 4	200	Einheiten

Die Transportkosten je Einheit betragen

	Empfänger 1	Empfänger 2	Empfänger 3	Empfänger 4
Lager 1	50	80	50	90
Lager 2	50	30	80	40
Lager 3	70	50	100	20

a) Ermitteln Sie eine Startlösung mittels Nord-West-Ecken-Regel
a) Ermitteln Sie eine Startlösung mittels Matrix-Minimum-Regel
a) Ermitteln Sie eine Startlösung mittels VOGELscher Approximationsmethode

Durch Addition der oben stehenden Mengen sehen wir, dass insgesamt 2000 Einheiten angeboten werden, aber nur 1600 Einheiten nachgefragt werden.

Das bedeutet, dass wir einen fiktiven Nachfrager "Restmenge" einfügen müssen, der die verbleibenden 400 Einheiten aufnimmt.

Die Transportkosten hierfür setzen wir auf einen Wert, der größer ist als alle bisher genannten Kosten, also beispielsweise auf 200 Geldeinheiten je Transporteinheit.

Damit erhalten wir das "Leertableau":

Rot: Kosten
Schwarz: Mengen

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	50	80	50	90	200
Lager 2 800	50	30	80	40	200
Lager 3 700	70	50	100	20	200

a) Nord-West-Ecken-Regel:

	E1 ~~300~~ X	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 ~~500~~ 200	300 50	80	50	90	200
Lager 2 800	50	30	80	40	200
Lager 3 700	70	50	100	20	200

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ 300	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 ~~500~~ ~~200~~ X	300 50	200 80	50	90	200
Lager 2 800	50	30	80	40	200
Lager 3 700	70	50	100	20	200

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ ~~300~~ X	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 ~~500~~ ~~200~~ X	300 50	200 80	50	90	200
Lager 2 ~~800~~ 500	50	300 30	80	40	200
Lager 3 700	70	50	100	20	200

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ ~~300~~ X	E3 ~~600~~ 100	E4 200	Rest 400
Lager 1 ~~500~~ ~~200~~ X	300 50	200 80	50	90	200
Lager 2 ~~800~~ ~~500~~ X	50	300 30	500 80	40	200
Lager 3 700	70	50	100	20	200

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ ~~300~~ X	E3 ~~600~~ ~~100~~ X	E4 ~~200~~ X	Rest ~~400~~ X
Lager 1 ~~500~~ ~~200~~ X	300 50	200 80	50	90	200
Lager 2 ~~800~~ ~~500~~ X	50	300 30	500 80	40	200
Lager 3 ~~700~~ X	70	50	100 100	200 20	400 200

Kosten NWE: 174.000

b) Matrix-Minimum-Verfahren

Leertableau:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	50	80	50	90	200
Lager 2 800	50	30	80	40	200
Lager 3 700	70	50	100	20	200

minimale Kosten: 20

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 ~~200~~ X	Rest 400
Lager 1 500	50	80	50	90	200
Lager 2 800	50	30	80	40	200
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200

minimale Kosten: 30

	E1 300	E2 ~~500~~ X	E3 600	E4 ~~200~~ X	Rest 400
Lager 1 500	50	80	50	90	200
Lager 2 ~~800~~ 300	50	500 30	80	40	200
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200

minimale Kosten: 50

Diese Kosten von 50 werden in drei Relationen angenommen.

Grundsätzlich kann man sich nun eine der drei Relationen aussuchen.

Wir wählen die Relation, bei der wir die größte Menge transprotieren können:
Lager 1 - Empfänger 3 mit 500 Einheiten.

	E1 300	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200
Lager 2 ~~800~~ 300	50	500 30	80	40	200
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200

minimale Kosten: 50

Wir sehen, dass nun sowohl des Lager 2 leergeräumt als auch der Empfänger E1 vollständig beliefert wird.

Damit später die Nachoptimierung mittels MoDi-Verfahren funktioniert, dürfen wir nur einen der beteiligten Partner streichen, d. h. auf die Menge "X" setzen.

Der andere Partner bekommt die noch zu transportierende Menge "0".

Wir entscheiden uns (willkürlich) dafür, den Empfänger E1 zu streichen.

Damit erhalten wir:

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200
Lager 2 ~~800~~ ~~300~~ 0	300 50	500 30	80	40	200
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200

minimale Kosten: 80

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200
Lager 2 ~~800~~ ~~300~~ ~~0~~ X	300 50	500 30	0 80	40	200
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200

Die verbleibenden Mengen aus Lager 3 können wir nun einfach verteilen:

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ ~~100~~ X	E4 ~~200~~ X	Rest ~~400~~ X
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200
Lager 2 ~~800~~ ~~300~~ ~~0~~ X	300 50	500 30	0 80	40	200
Lager 3 ~~700~~ ~~500~~ X	70	50	$\boxed{100}$ 100	200 20	$\boxed{400}$ 200

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ ~~100~~ X	E4 ~~200~~ X	Rest ~~400~~ X
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200
Lager 2 ~~800~~ ~~300~~ ~~0~~ X	300 50	500 30	0 80	40	200
Lager 3 ~~700~~ ~~500~~ X	70	50	100 100	200 20	400 200

Kosten MMV: 149.000

Vergleich:
Kosten NWE: 174.000

c) VOGEL-Approximation:

Leertableau:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400	Δ
Lager 1 500	50	80	50	90	200	
Lager 2 800	50	30	80	40	200	
Lager 3 700	70	50	100	20	200	
Δ						

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400	Δ
Lager 1 500	50	80	50	90	200	0
Lager 2 800	50	30	80	40	200	10
Lager 3 700	70	50	100	20	200	30
Δ	0	20	30	20	0	

maximale Differenz: 30

Wir suchen nun das Feld mit den minimalen Kosten in allen Reihen mit dieser maximalen Differenz:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400	Δ
Lager 1 500	50	80	50	90	200	0
Lager 2 800	50	30	80	40	200	10
Lager 3 700	70	50	100	20	200	30
Δ	0	20	30	20	0	

minimale Kosten der markierten Felder: 20

Über die gefundene Relation L3 - E4 transportieren wir die maximal mögliche Menge: 200

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 ~~200~~ X	Rest 400	Δ
Lager 1 500	50	80	50	90	200	0
Lager 2 800	50	30	80	40	200	20
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200	20
Δ	0	20	30		0	

maximale Differenz: 30

Wir suchen nun das Feld mit den minimalen Kosten in allen Reihen mit dieser maximalen Differenz:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 ~~200~~ X	Rest 400	Δ
Lager 1 500	50	80	50	90	200	0
Lager 2 800	50	30	80	40	200	20
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200	20
Δ	0	20	30		0	

minimale Kosten der markierten Felder: 50

Über die gefundene Relation L1 - E3 transportieren wir die maximal mögliche Menge: 500

	E1 300	E2 500	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400	Δ
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200	
Lager 2 800	50	30	80	40	200	20
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200	20
Δ	20	20	20		0	

maximale Differenz: 20

Wir suchen nun das Feld mit den minimalen Kosten in allen Reihen mit dieser maximalen Differenz:

	E1 300	E2 500	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400	Δ
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200	
Lager 2 800	50	30	80	40	200	20
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200	20
Δ	20	20	20		0	

minimale Kosten der markierten Felder: 30

Über die gefundene Relation L2 - E2 transportieren wir die maximal mögliche Menge: 500

	E1 300	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400	Δ
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200	
Lager 2 ~~800~~ 300	50	500 30	80	40	200	30
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200	30
Δ	20		20		0	

maximale Differenz: 30

Wir suchen nun das Feld mit den minimalen Kosten in allen Reihen mit dieser maximalen Differenz:

	E1 300	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400	Δ
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200	
Lager 2 ~~800~~ 300	50	500 30	80	40	200	30
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200	30
Δ	20		20		0	

minimale Kosten der markierten Felder: 50

Über die gefundene Relation L2 - E1 transportieren wir die maximal mögliche Menge: 300

Wir streichen (willkürlich) Empfänger E1 und setzen die Transportmenge bei L2 auf "0":

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400	Δ
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200	
Lager 2 ~~800~~ ~~300~~ 0	300 50	500 30	80	40	200	120
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200	100
Δ			20		0	

maximale Differenz: 120

Wir suchen nun das Feld mit den minimalen Kosten in allen Reihen mit dieser maximalen Differenz:

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400	Δ
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200	
Lager 2 ~~800~~ ~~300~~ 0	300 50	500 30	80	40	200	120
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200	100
Δ			20		0	

minimale Kosten der markierten Felder: 80

Über die gefundene Relation L2 - E3 transportieren wir die maximal mögliche Menge: 0

Nun streichen wir Lager 2

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400	Δ
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200	
Lager 2 ~~800~~ ~~300~~ ~~0~~ X	300 50	500 30	0 80	40	200	
Lager 3 ~~700~~ 500	70	50	100	200 20	200	
Δ						

Die verbleibende Menge verteilen wir wieder:

	E1 ~~300~~ X	E2 ~~500~~ X	E3 ~~600~~ 100	E4 ~~200~~ X	Rest 400
Lager 1 ~~500~~ X	50	80	500 50	90	200
Lager 2 ~~800~~ ~~300~~ ~~0~~ X	300 50	500 30	0 80	40	200
Lager 3 ~~700~~ ~~500~~ X	70	50	100 100	200 20	400 200

Kosten VOGEL 149.000

Vergleich:
Kosten MMV 149.000

Kosten NWE 174.000

Nachoptimierung mittels MoDi-Verfahren.

Dazu starten wir mit der Lösung, die wir bei der Nord-West-Ecken-Regel erhalten haben:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	300 50	200 80	50	90	200
Lager 2 800	50	300 30	500 80	40	200
Lager 3 700	70	50	100 100	200 20	400 200

aktuelle Kosten: 174.000

Phase 1: Wir betrachten die besetzten Felder und berechnen die Hilfsgrößen:

$c11 - z1 - s1 = 0$	$50 - z1 - s1 = 0$
$c12 - z1 - s2 = 0$	$80 - z1 - s2 = 0$
$c22 - z2 - s2 = 0$	$30 - z2 - s2 = 0$
$c23 - z2 - s3 = 0$	$80 - z2 - s3 = 0$
$c33 - z3 - s3 = 0$	$100 - z3 - s3 = 0$
$c34 - z3 - s4 = 0$	$20 - z3 - s4 = 0$
$c35 - z3 - s5 = 0$	$200 - z3 - s5 = 0$

Wählt man nun beispielsweise $z3 = 0$ so erhält man

z1 =	30	s1 =	20
z2 =	-20	s2 =	50
z3 =	0	s3 =	100
		s4 =	20
		s5 =	200

Phase 2: Wir betrachten die freien Felder und berechnen die Kosteneinsparpotentiale:

c13 - z1 - s3 =	50 - 30 - 100	-80
c14 - z1 - s4 =	90 - 30 - 20	40
c15 - z1 - s5 =	200 - 30 - 200	-30
c21 - z2 - s1 =	50 - (-20) - 20	50
c24 - z2 - s4 =	40 - (-20) - 20	40
c25 - z2 - s5 =	200 - (-20) - 200	20
c31 - z3 - s1 =	70 - 0 - 20	50
c32 - z3 - s2 =	50 - 0 - 50	0

Wir suchen nun den kleinsten negativen Wert dieser Einsparpotentiale: -80

In die zugehörige Relation 1 - 3, also L1 - E3 setzen wir "+ T" für die noch zu bestimmende Transportmenge, die über diese Relation transportiert werden soll:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	300 50	200 80	+ T 50	90	200
Lager 2 800	50	300 30	500 80	40	200
Lager 3 700	70	50	100 100	200 20	400 200

Nun müssen wir einen "geschlossenen Weg" über ausschließlich besetzte Felder finden, so dass wir eine Transportmenge von einer Relation auf eine andere Relation übertragen können.

Gehen wir beispielsweise Zeilenweise vor.

Die (noch zu bestimmende) Menge "T", die wir in die Relation L1 - E3 platzieren wollen, muss entweder bei der Relation L1 - E1 oder bei L1 - E2 abgezogen werden.

Angenommen, wir würden bei L1 - E1 die Menge abziehen, so erhielten wir

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	300 - T 50	200 80	+ T 50	90	200
Lager 2 800	50	300 30	500 80	40	200
Lager 3 700	70	50	100 100	200 20	400 200

Damit wäre die Bilanz von Lager 1 wieder ausgeglichen.

Aber nunmehr stimmt die Transportbilanz von E1 nicht mehr.
Wir müssen also in einem anderen BESETZTEN Feld von E1 diese Menge addieren.

Aber: In der E1-Spalte gibt es keine sonstigen besetzten Felder.

Daher können wir diese Relation L1 - E1 nicht verwenden.

Wir MÜSSEN also zur Kompensation des "+ T" in L1 - E3 nunmehr die einzige verbliebene Alternative L1 - E2 ins Spiel bringen und die gleiche Menge dort subtrahieren:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	300 50	200 - T 80	+ T 50	 90	 200
Lager 2 800	 50	300 30	500 80	 40	 200
Lager 3 700	 70	 50	100 100	200 20	400 200

Die Transportbilanz von L1 ist in Ordnung.

Um die Bilanz bei E2 zu korrigieren, müssen wir nun die Menge in L2 - E2 wieder addieren:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	300 50	200 - T 80	+ T 50	 90	 200
Lager 2 800	 50	300 + T 30	500 80	 40	 200
Lager 3 700	 70	 50	100 100	200 20	400 200

Jetzt stimmt die Transportbilanz bei E2 und wir müssen L2 korrigieren.

Die in L2 - E2 addierte Menge müssen wir nun in L2 - E3 wieder abziehen:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	300 50	200 - T 80	+ T 50	 90	 200
Lager 2 800	 50	300 + T 30	500 - T 80	 40	 200
Lager 3 700	 70	 50	100 100	200 20	400 200

Damit stimmt die Bilanz von L2 - und auch die von E3.

Wir müssen nun die MAXIMAL MÖGLICHE MENGE (Keine Teil-Mengen !) ermitteln, die wir in die Relation L1 - E3 einstellen.

Diese Menge ist die kleinste Menge, die aktuell in den Relationen eingetragen ist, bei denen mit "- T" eine Transportmenge abzuziehen ist (denn sonst würde es irgendwo negative Transportmengen geben, was nicht sein kann).

In unserem Fall: min(200; 500) = 200.

Diese Menge von 200 Einheiten windmen wir nun um (d. h. wir addieren Sie bei den "+ T"-Feldern und subtrahieren sie bei den "- T"-Feldern):

Dann erhalten wir

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	300 50	80	200 50	90	200
Lager 2 800	50	500 30	300 80	40	200
Lager 3 700	70	50	100 100	200 20	400 200

aktuelle Kosten: 158.000

vorher: 174.000

Differenz: - 16.000 = -80 * 200 = Einsparpotential mal umgewidmete Menge

Ist diese Lösung optimal?

Phase 1: Wir betrachten die besetzten Felder und berechnen die Hilfsgrößen:

$c_{11} - z_1 - s_1 = 0$	$50 - z_1 - s_1 = 0$
$c_{13} - z_1 - s_3 = 0$	$50 - z_1 - s_3 = 0$
$c_{22} - z_2 - s_2 = 0$	$30 - z_2 - s_2 = 0$
$c_{23} - z_2 - s_3 = 0$	$80 - z_2 - s_3 = 0$
$c_{33} - z_3 - s_3 = 0$	$100 - z_3 - s_3 = 0$
$c_{34} - z_3 - s_4 = 0$	$20 - z_3 - s_4 = 0$
$c_{35} - z_3 - s_5 = 0$	$200 - z_3 - s_5 = 0$

Wählt man nun beispielsweise $z_3 = 0$ so erhält man

$z_1 =$	-50	$s_1 =$	100
$z_2 =$	-20	$s_2 =$	50
$z_3 =$	0	$s_3 =$	100
		$s_4 =$	20
		$s_5 =$	200

Phase 2: Wir betrachten die freien Felder und berechnen die Kosteneinsparpotentiale:

$c_{12} - z_1 - s_2 =$	80 - (-50) - 50	80
$c_{14} - z_1 - s_4 =$	90 - (-50) - 20	120
$c_{15} - z_1 - s_5 =$	200 - (-50) - 200	50
$c_{21} - z_2 - s_1 =$	50 - (-20) - 100	-30
$c_{24} - z_2 - s_4 =$	40 - (-20) - 20	40
$c_{25} - z_2 - s_5 =$	200 - (-20) - 200	20
$c_{31} - z_3 - s_1 =$	70 - 0 - 100	-30
$c_{32} - z_3 - s_2 =$	50 - 0 - 50	0

Wir suchen nun den kleinsten negativen Wert dieser Einsparpotentiale: -30

Wir haben nun zwei Möglichkeiten: Die Relation L2 - E1 oder die Relation L3 - E3

Wir wählen (willkürlich) L2 - E1

In diese Relation L2 - E1 setzen wir "+ T" für die noch zu bestimmende Transportmenge,
die über diese Relation transportiert werden soll:

	E1	E2	E3	E4	Rest
	300	500	600	200	400
Lager 1	300		200		
500	50	80	50	90	200
Lager 2	+ T	500	300		
800	50	30	80	40	200
Lager 3			100	200	400
700	70	50	100	20	200

Um einen "geschlossenen Weg" über besetzte Felder zu finden, betrachtet man jetzt am besten
zunächst die Spalte. Dort gibt es nur eine Möglichkeit der Kompensation: L1 - E1:

	E1	E2	E3	E4	Rest
	300	500	600	200	400
Lager 1	300 - T		200		
500	50	80	50	90	200
Lager 2	+ T	500	300		
800	50	30	80	40	200
Lager 3			100	200	400
700	70	50	100	20	200

Um die Bilanz von L1 zu korrigieren, müssen wir die Relation L1 - E3 verwenden:

	E1	E2	E3	E4	Rest
	300	500	600	200	400
Lager 1	300 - T		200 + T		
500	50	80	50	90	200
Lager 2	+ T	500	300		
800	50	30	80	40	200
Lager 3			100	200	400
700	70	50	100	20	200

Um die Transportbilanz von E3 richtig zu stellen, haben wir grundsätzlich zwei Möglichkeiten.

Man sieht aber sofort, dass L2 - E3 die richtige Wahl ist, da dann die gesamten Transportbilanzen
wieder ausgeglichen sind:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	300 - T 50	80	200 + T 50	90	200
Lager 2 800	+ T 50	500 30	300 - T 80	40	200
Lager 3 700	70	50	100 100	200 20	400 200

Jetzt suchen wir wieder die maximale Menge, die wir umwidmen können, in dem wir die "- T"-Felder betrachten:

In unserem Fall: min(300; 300) = 300.

Diese Menge widmen wir gleich um.

ACHTUNG - GANZ WICHTIG:

Dabei werden wir gleich durch Subtraktion EIN FELD LEEREN (also kein Eintrag mehr bei der Transportmenge) und in DEM ANDEREN FELD die Transportmenge "0" eintragen.

Wenn wir beide Felder leeren würden, stimmt die Aufteilung in "besetzte" und "freie" felder nicht mehr und wir können nicht weiterrechnen.

Für das zu leerende Feld wählen wir (willkürlich) L1 - E1:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	50	80	500 50	90	200
Lager 2 800	300 50	500 30	0 80	40	200
Lager 3 700	70	50	100 100	200 20	400 200

aktuelle Kosten: 149.000

vorher: 158.000

Differenz: - 9.000 = -30 * 300 = Einsparpotential mal umgewidmete Menge

Ist diese Lösung optimal?

Phase 1: Wir betrachten die besetzten Felder und berechnen die Hilfsgrößen:

c13 - z1 - s3 = 0	50 - z1 - s3 = 0
c21 - z2 - s1 = 0	50 - z2 - s1 = 0
c22 - z2 - s2 = 0	30 - z2 - s2 = 0
c23 - z2 - s3 = 0	80 - z2 - s3 = 0
c33 - z3 - s3 = 0	100 - z3 - s3 = 0
c34 - z3 - s4 = 0	20 - z3 - s4 = 0
c35 - z3 - s5 = 0	200 - z3 - s5 = 0

Wählt man nun beispielsweise z3 = 0 so erhält man

z1 =	-50	s1 =	70
z2 =	-20	s2 =	50
z3 =	0	s3 =	100
		s4 =	20
		s5 =	200

Phase 2: Wir betrachten die freien Felder und berechnen die Kosteneinsparpotentiale:

c11 - z1 - s1 =	50 - (-50) - 70	30
c12 - z1 - s2 =	80 - (-50) - 50	80
c14 - z1 - s4 =	90 - (-50) - 20	120
c15 - z1 - s5 =	200 - (-50) - 200	50
c24 - z2 - s4 =	40 - (-20) - 20	40
c25 - z2 - s5 =	200 - (-20) - 200	20
c31 - z3 - s1 =	70 - 0 - 70	0
c32 - z3 - s2 =	50 - 0 - 50	0

Wir suchen nun den kleinsten negativen Wert dieser Einsparpotentiale, müssen aber feststellen, dass alle Kosteeinsparpotentiale größer oder gleich Null sind.

Es gibt also keine weitere Einsparmöglichkeit mehr. Die obige Lösung ist optimal.

ENTARTUNG

Nun kann man sich die Frage stellen, ob dies die EINZIGE optimale Lösung ist oder ob es weitere optimale Lösungen gibt.

Wenn ja, spricht man von Entartung.

Die optimale Lösung (siehe oben) ist

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	50	80	500 50	90	200
Lager 2 800	300 50	500 30	0 80	40	200
Lager 3 700	70	50	100 100	200 20	400 200

aktuelle Kosten: 149.000

An dieser Stelle sei angemerkt, dass wir - ausgehend von der Nord-West-Ecken-Regel - hier dieselbe Lösung erhalten, die wir auch beim Matrix-Minimum-Verfahren als auch bei der VOGEL-Approximation erhalten haben, wenn man von der Position der Transportmenge "0" im Tableau absieht.

Betrachten wir noch einmal die Kosteneinsparpotentiale, die wir vorher berechnet haben:

$c_{11} - z_1 - s_1 =$	$50 - (-50) - 70$	30
$c_{12} - z_1 - s_2 =$	$80 - (-50) - 50$	80
$c_{14} - z_1 - s_4 =$	$90 - (-50) - 20$	120
$c_{15} - z_1 - s_5 =$	$200 - (-50) - 200$	50
$c_{24} - z_2 - s_4 =$	$40 - (-20) - 20$	40
$c_{25} - z_2 - s_5 =$	$200 - (-20) - 200$	20
$c_{31} - z_3 - s_1 =$	$70 - 0 - 70$	0
$c_{32} - z_3 - s_2 =$	$50 - 0 - 50$	0

Wenn ALLE Einsparpotentiale POSITIV sind, dann ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Wir sehen hier aber zwei Relationen, bei denen wir ein Einsparpotential von Null haben.

Das bedeutet nun Folgendes:

Wenn wir eine der beiden Relationen in unseren Transportplan aufnehmen, so wird zwar ein anderer Transportplan entstehen, aber mit den gleichen Gesamtkosten wie vorher.

Prüfen wir das einmal nach:

Dazu wählen wir (willkürlich) die Relation 31, also L3 - E1, die wir in den Transportplan aufnehmen wollen:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	 50	 80	500 50	 90	 200
Lager 2 800	300 50	500 30	0 80	 40	 200
Lager 3 700	+ T 70	 50	100 100	200 20	400 200

Zur Kompensation betrachen wir die E1-Spalte:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	 50	 80	500 50	 90	 200
Lager 2 800	300 - T 50	500 30	0 80	 40	 200
Lager 3 700	+ T 70	 50	100 100	200 20	400 200

Diese Änderung korrigieren wir, in dem wir L2 - E3 ins Spiel bringen:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	 50	 80	500 50	 90	 200
Lager 2 800	300 - T 50	500 30	0 + T 80	 40	 200
Lager 3 700	+ T 70	 50	100 100	200 20	400 200

Und schließlich:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	 50	 80	500 50	 90	 200
Lager 2 800	300 - T 50	500 30	0 + T 80	 40	 200
Lager 3 700	+ T 70	 50	100 - T 100	200 20	400 200

Jetzt suchen wir wieder die maximale Menge, die wir umwidmen können, in dem wir die "- T"-Felder betrachten:

In unserem Fall: min(300; 100) = 100.

Damit erhalten wir

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	 50	 80	500 50	 90	 200
Lager 2 800	200 50	500 30	100 80	 40	 200
Lager 3 700	100 70	 50	 100	200 20	400 200

aktuelle Kosten: 149.000

Hier haben wir nun eine deutlich andere Lösung als diejenige, die wir oben
durch das Matrix-Minimum-Verfahren bzw. die VOGEL-Approximation erhalten haben.

Alternative:

Wenn wir nun die Relation 32, also L3 - E2 in den Transportplan aufnehmen, erhalten wir

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	 50	 80	500 50	 90	 200
Lager 2 800	300 50	500 30	0 80	 40	 200
Lager 3 700	 70	+ T 50	100 100	200 20	400 200

Kompensation durch die E2-Spalte:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	 50	 80	500 50	 90	 200
Lager 2 800	300 50	500 - T 30	0 80	 40	 200
Lager 3 700	 70	+ T 50	100 100	200 20	400 200

und weiter:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	50	80	500 50	90	200
Lager 2 800	300 50	500 - T 30	0 + T 80	40	200
Lager 3 700	70	+ T 50	100 100	200 20	400 200

sowie

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	50	80	500 50	90	200
Lager 2 800	300 50	500 - T 30	0 + T 80	40	200
Lager 3 700	70	+ T 50	100 - T 100	200 20	400 200

Jetzt suchen wir wieder die maximale Menge, die wir umwidmen können, in dem wir die "- T"-Felder betrachten:

In unserem Fall: min(500; 100) = 100.

Damit erhalten wir

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	50	80	500 50	90	200
Lager 2 800	300 50	400 30	100 80	40	200
Lager 3 700	70	100 50	100	200 20	400 200

aktuelle Kosten: 149.000

Damit haben wir (bis auf die Null im ersten Tableau) folgende drei optimale Lösungen gefunden:

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	50	80	500 50	90	200
Lager 2 800	300 50	500 30	0 80	40	200
Lager 3 700	70	50	100 100	200 20	400 200

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	50	80	500 50	90	200
Lager 2 800	200 50	500 30	100 80	40	200
Lager 3 700	100 70	50	100	200 20	400 200

	E1 300	E2 500	E3 600	E4 200	Rest 400
Lager 1 500	50	80	500 50	90	200
Lager 2 800	300 50	400 30	100 80	40	200
Lager 3 700	70	100 50	100	200 20	400 200

Ökonomisch gesehen würde man wohl jetzt die erste der drei genannten Lösungen realisieren, denn wenn man die Relation L2 - E3 - das mit Menge 0 besetzte Feld - außer Acht läßt (denn den leeren Lastwagen würde man ja nicht losschicken), muss man hier nur sechs Transportrelationen bedienen, in den beiden anderen optimalen Fällen jedoch sieben.